授業のノート

Rupy

平成 20 年 6 月 12 日

概 要

これは大学の講義のノートをまとめたものであり、信頼性に欠けます。大間違いを含む可能性も大いにありますので、参考程度にお使いください。突然公開中止となる可能性もあります。また使用したことによるいかなる損害も補償いたしませんのでご了承ください。

第1章　関数の極限と連続

定義

$\mathbb{R}$:実数全体からなる集合

$\mathbb{Q}$:有理数全体からなる集合

$\mathbb{Z}$:整数全体からなる集合

$\mathbb{N}$:自然数全体からなる集合

自然数は以下のように表せます

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots\}$$

整数も同様です

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

有理数は以下のように表せます。

$$\mathbb{Q} = \{\frac{q}{p} \ ; \ q \in \mathbb{Z} \ , \ p \in \mathbb{N}\}$$

実数は表記することができません

$$\mathbb{R} = \{ \ ? \ \}$$

区間

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ a \leq x \leq b\}$ 閉区間

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ a < x < b\}$ 開区間

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ a \leq x < b\}$ 半開区間

グラフ省略

$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ a \leq x < b\}$※ 1

$[a,b], (a,b), [a,b), (a,b]$ 有限区間
$(-\infty,b], (a,\infty) \cdots$ 無限区間

※ 1$[-\infty,b]$ は誤りである。

$S \subset \mathbb{R}$ 集合において

数 a が S の上界
$\Leftrightarrow$ 任意の $x \in S$ に対して

$$x \leq a^{※2}$$

数 b が S の下界
$\Leftrightarrow$ 任意の $x \in S$ に対して

$$b \leq x^{※3}$$

☆集合 S が上界をもつとき、S は上に有界　であるという
(下)　(下に有界)

abを S の上界　とすると$S \subset (-\infty, a]$
(下界)　($S \subset [b, \infty)$)

上に有界かつ下に有界なときに有界という

☆ S が有界
$\Leftrightarrow$ ある a,b があって
$S \subset [a, b]$

例）
$S = \mathbb{N}$
下に有界
有界ではない

$S = \mathbb{Z}$
上にも下にも有界でない

$S = [a, b]$
有界

※ 2$<$ ではなく $\leq$ であることに注意。端を含む。
※ 3同様に端を含む

集合 S に対して

$U_S =$ S の上界全体から成る集合
$L_S =$ S の下界全体から成る集合

例)

$S = [\alpha, \beta]$ とすると

集合 S について
$U_S = [\beta, \infty]$
$L_S = (\infty, \alpha]$

自然数の集合について
$U_{\mathbb{N}} = \phi$
$L_{\mathbb{N}} = (-\infty, 1]$

整数の集合について
$U_{\mathbb{Z}} = \phi$
$L_{\mathbb{Z}} = \phi$

$$\left.\begin{array}{l}\text{任意の } S \subset \mathbb{R} \text{ に対して} \\ \quad U_S \neq \phi \;\Rightarrow\; U_S\text{の最小値が存在する} \\ \quad L_S \neq \phi \;\Rightarrow\; L_S\text{の最大値が存在する}\end{array}\right\}\text{※}$$

※ $\mathbb{Q}$(有理数) では上の性質は成り立たない。